## 1.8　繰りこみ群の考え方

### 1.8.1　臨界現象の特徴：自己相似性

臨界現象の $T = T_{\rm c}$ では、相関長が無限大となり、物理量が距離のべき乗依存性を持つ。こらはどのようなことかというと、系が秩序状態になりかけで、たとえばスピン系の場合に、スピンが揃った領域が「フラクタル」状になっていることを示す。実際、簡単なシミュレーションの結果からも、そのことが予想される。フラクタルとは、自己相似のことであり、長狭スケールを変更して一部を拡大して見ても、もとの自分と同じように見えるという性質である。Mandelbrot のフラクタル図形が有名である。

別な言い方をすると、相関長 $\xi$ が有限の場合、系の一部を拡大していくときに、我々の視線が相関長 $\xi$ より短い部分を見るようになれば、系は相転移温度以上の場合にはランダムに、相転移温度以下の場合は秩序状態に、見えるのである。一方、$T = T_{\rm c}$ のときには、いくら視線を拡大していっても、ランダムにも秩序状態にもなることはない。$\xi = \infty$ ということには、こういう意味がある。

式の上では、自己相似ということは距離 $r$ のべき乗と関連している。視線のスケールを変えるということは、物差しを変更するということで、数学的には変数を $r \to 2r$ というように変数変換することに対応する。

もし相関関数などがべき乗 $r^{-\alpha}$ であれば、

$$r^{-\alpha} \to (2r)^{-\alpha} = 2^{-\alpha} \times r^{-\alpha} \tag{1}$$

となるので、係数は変更されるが、まだ同じ関数形である。一方指数関数であれば、

$$e^{-r/\xi} \to e^{-2r/\xi} \tag{2}$$

となり、減衰の仕方が倍になってしまう。つまり関数形が変わる。または相関長が半分になってしまうということもできる。

このように自己相似というときには、べき乗依存性が特徴となる。地震のマグニチュードと発生頻度についてもべき乗則（リヒター則）というものがある。

### 1.8.2　くりこみ群

以上の考えをもとに、くりこみ群というものを考える。視点のスケールを変えるということは、「粗視化」というプロセスであると考える。つまり、系の状態を 2 倍遠くから見ることにすると、系の細かいところは見えなくなってくる。この操作を数学的に定義する。そうすると、「粗視化」の後で系を記述するパラメータが実効的に変化する。例えばスピン系の統計力学では系は分配関数

$$Z = \mathrm{Tr}\ \exp(-\beta J \sum_{i,j} S_i^z S_j^z + \beta g \mu_{\rm B} \sum_i S_i^z) \tag{3}$$

などで記述できるから、パラメータとしては $\beta J$ や $\beta H$ などを考えればよい。粗視化したあとで、「$\beta J$ や $\beta H$ が異なる値をもつ系の振舞いと同じように見える」とすると、新しい $\beta J$ や $\beta H$ が実効的なパラメータになったということになる。

これを繰り返していくのを「くりこみ群」と呼んでいる。粗視化を繰り返していくと、$T > T_{\rm c}$ であればいつかはランダムになる。このことは、くりこみ群でパラメータが、$\beta J \to 0$ になると予想される。つまり粗視化によって実効的な温度がどんどん高くなって、事実上無限大の温度 ($T = \infty$ つまり $\beta J = 0$) になると考えるのである。別な言い方では、$J$ がどんどん小さくなって事実上相互作用が無いのと同じ、といってもよい。

逆に $T < T_{\rm c}$ であればいつかは秩序状態になるということは、くりこみ群で $\beta J \to \infty$ になることであると予想される。つまり粗視化によって今度は温度がどんどん低くなって、事実上基底状態と同じ

振舞いになるということである。($T=0$ つまり $\beta J=\infty$) 別な言い方では、$J$ が無限に大きくなって、相互作用が絶対に得をしている秩序状態が実現する、といってもよい。

こう考えると、中間の $T=T_{\mathrm{c}}$ ではどのようになるか分かりやすくなる。$T_{\mathrm{c}}$ 直上の場合は、くりこんで行っても、パラメータがいつかは「変化しなくなる」ということを意味する。(大きくなり続けるわけでもないし、小さくなり続けるわけでもない、という中間はこれしかない) パラメータが変わらないということが、自己相似ということの数学的な表現となる。パラメータ空間では、このような点を「不動点」という。

### 1.8.3 粗視化

次に具体的に粗視化というのは、どのように行えばよいのか考えてみよう。要するに系を 2 倍遠くから見て、細かいところを見ないようにすればよい。

$$Z=\mathrm{Tr}\ e^{-\beta\mathcal{H}} \tag{4}$$

において、Tr が厳密に実行できてしまえば、問題は解けたことになる。実際にはこれができないので、粗視化の操作として、Tr を段階的に行うことを考える。つまり、細かい部分を先に Tr を取ってしまい、粗視化したモデルとするのである。新たに得られたものを、新しいパラメータを持ったハミルトニアン（または $\beta\mathcal{H}$）とすれば、パラメータが 1 回「くりこまれた」ことになる。具体的には、短波長のゆらぎの成分について、先に Tr をとればよい。(例として 1 次元イジングモデルがよく使われる。この場合は厳密にくりこみ操作ができる)

スピン系の場合、たとえば粗視化して 2 倍粗く見ることを考える。 2 次元のモデルなら $2\times\ 2$ の 4 つのスピンから粗視化した 1 つの新しいスピンに置き換える。この新しいスピン間の間の相互作用やかかる磁場を評価して、それを新しいパラメータとするのである。

### 1.8.4 スケール変換

しかし、この操作だけだと、全体のスピンの数が 1 /4 になってしまう。それにスピン間の距離も 2 倍になっている。これを元に戻して、元のハミルトニアンと近いものにしたい。そのためには、ものさし（スケール）を変更する必要がある。具体的には座標を

$$\boldsymbol{r}\to\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{r}/2 \tag{5}$$

とすれば、新しい座標系ではスピンの間隔は元と同じ距離になる。さらに必要であれば、スピンの大きさ（または適当な物理量の大きさ）についてのスケール変換も行う。

$$\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{r}_i}\to 2^{\lambda}\boldsymbol{S}'_{\boldsymbol{r}_i/2} \tag{6}$$

結局、(1) 粗視化と (2) スケール変換の 2 つを続けて行うことにより、ハミルトニアンが元のハミルトニアンと同じ形でパラメータが違ったものになればよい。これが 1 回分のくりこみ操作である。(もし新たらしいハミルトニアンの項が現れてしまったら、それもパラメータに含めばよい) ただし、上記の例では、全体の系の大きさが 1/4 になってしまったことに注意しなければならない。このことは全自由エネルギーを考えるときには重要になるが、パラメータのくりこみという意味では重要ではない。

### 1.8.5　くりこみ群の不動点

相転移現象を理解するためには、このくりこみ操作を何度も繰り返す必要がある。それをくりこみ群と呼ぶ。次に、パラメータ空間での不動点を見つけることが重要となる。前に書いたように、不動点が臨界温度と関連する。

まず、適当な相互作用の大きさ $J$ や $h$ を選び、さらに温度 $T$ を決める。このパラメータから出発してくりこみ操作を繰り返す。初期の位置がうまくなっていれば、パラメータ空間で不動点に「吸い込まれる」状況が生じる。これが $T = T_\mathrm{c}$ の状況である。最初に選んだ温度が相転移温度だった、と考えるのである。

次に、最初の温度を少しずらした点から出発したとする。そうすると、繰り込みを続けると $T = T_\mathrm{c}$ から出発した場合のすぐそばを移動していくだろうが、不動点から少しだけはずれるはずである。そうすると、不動点が「不安定」な不動点だとすると、不動点に近づいたあと、急速に不動点から離れていく。（このあたりは、講義のときに黒板で書いた図を参照しないと、ちんぷんかんぷんとは思うが）その結果、高温の場合のハミルトニアンにパラメータが繰り込まれれば、出発点の温度が結局はランダムをしめす $T > T_\mathrm{c}$ の場合だったとみなせる。

出発点を逆側に選べば、こんどは不動点に近づいたあと、急速に逆側に離れていく。その結果は、低温の場合のパラメータに近づくはずである。これが出発点の温度が $T < T_\mathrm{c}$ の場合だったとみなせる。

くりこみ群の取り扱いは大雑把に以上のようなものである。しかし、モデルを立てて具体的な計算をしてみないと、具体的なくりこみの様子は分からない。

### 1.8.6　くりこみ群による臨界指数

最後に、このようなくりこみ群の結果として、どのように臨界指数を決定するのか考えよう。くりこみを 1 回やったために分配関数が

$$Z = \mathrm{Tr}_{\text{元の大きさの系}}\ e^{-\beta\mathcal{H}} = \mathrm{Tr}_{\text{小さくなった系}}\ e^{-(\beta\mathcal{H})'} \tag{7}$$

となったとする。前の例では 2× 2 のスピンを粗視化して新しく 1 つのスピンにしたが、一般には $s^d$ のスピンを粗視化して 1 つのスピンにする等をかんがえる。$s$ は任意の整数。$d$ は系の次元。

上の式で元のハミルトニアンで無次元化した温度 $t$ と無次元化した磁場 $h$ を考える。左側の Tr からは、自由エネルギー密度 $f_s(t,h)$ が得られるとする。くりこみの不動点近傍の特異な振舞いをする部分だけを取り出すという意味で、singular な部分を意味する $f_s$ を用いている。右側の Tr からは、パラメータが $t', h'$ と変更されたので、自由エネルギー密度 $f_s(t',h')$ が得られる。ハミルトニアンの形が同じなので、同じ関数形 $f_s$ が現れ、パラメータだけが違うところがミソである。

ただし系の体積が右側では $s^{-d}$ 倍されていることに注意しなければならない。$Z$ からは、系の全自由エネルギーが得られるはずなので、左側からは $L^d f_s(t,h)$ の全自由エネルギー、右側からは $(L/s)^d f_s(t',h')$ の自由エネルギーが得られる。同じ $Z$ から得られる自由エネルギーなので、両者は等しくなければならない。結局

$$L^d f_s(t,h) = (L/s)^d f_s(t',h') \tag{8}$$

さて、不動点近傍でくりこみ 1 回分で

$$t \to t' = s^{y_t} t, \qquad h \to h' = s^{y_h} h \tag{9}$$

と変換されるとしよう。ここで出てくる $y_t, y_h$ は、具体的なモデルによって異なるが、ミクロなハミルトニアンから導出できるバラメータである。

これを仮定すると、自由エネルギーの間に成り立つ関係式として

$$f_s(t,h) = (1/s)^d f_s(s^{y_t} t, s^{y_h} h) \tag{10}$$

が得られる。さらにくりこみを $\ell$ 回繰り返すとする。そうすると

$$f_s(t,h) = (1/s)^{d\ell} f_s(s^{y_t\ell}t, s^{y_h\ell}h) \tag{11}$$

が得られる。

ここで、$s^{y_t\ell_0} = 1/|t|$ となるまでくりこみを繰り返したとする。つまり

$$\ell_0 = -\frac{\ln|t|}{y_t \ln s} \tag{12}$$

ととる。そうすると、

$$f_s(t,h) = (1/s)^{d\ell_0} f_s(s^{y_t\ell_0}t, s^{s_h\ell_0}h) = |t|^{d/y_t} f_s(\pm 1, |t|^{-y_h/y_t}h) \qquad (\text{符号は } t \text{ の正負による}) \tag{13}$$

が得られる。右辺は係数を除き、$|t|^{-y_h/y_t}h$ のみの関数であることを示している。これを 1 つの関数 $f(|t|^{-y_h/y_t}h)$ と思って書き直すと、

$$f_s(t,h) = |t|^{d/y_t} f(h/|t|^{y_h/y_t}) \tag{14}$$

が得られる。これは実は、前節で説明したスケーリング仮説とまったく同じ形をしている。前節では

$$f_s(t,h) = t^x f(h/t^y) \tag{15}$$

と仮定したので、$x = d/y_t, y = y_h/y_t$ と対応づければ、スケーリング仮説から臨界指数の関係式を（スケーリング関係式）を導きだしたことと全く同じことができる。全節の計算を繰り返せば

$$2-\alpha = x = \frac{d}{y_t}, \qquad 2-\alpha-\beta = y = \frac{y_h}{y_t} \tag{16}$$

が得られる。

今重要なことは、$y_t, y_h$ がミクロに計算できるということである。$y_t, y_h$ が分かれば $\alpha$ などの臨界指数が計算できるので、ミクロなハミルトニアンからくりこみ群を通して、臨界指数が計算できるということになる。

### 1.8.7 相関関数のくりこみ群

相関関数は、たとえばスピン系であれば

$$g(r) = \langle S^z(0) S^z(r) \rangle \tag{17}$$

と定義されるものであった。これについても、粗視化とスケール変換を合せたくりこみを行ってみよう。相関関数は温度 $t$ と磁場 $h$ の関数でもあることを明示的に書いておくと、1 回くりこみをすることによって、

$$g(r,t,h) = s^{2\lambda} \langle S^z(0) S^z(r/s) \rangle_{\text{くりこまれたハミルトニアン}} \tag{18}$$

となる。くりこまれたハミルトニアンもパラメータが違うだけなので、同じ相関関数となっているはずである。したがって、相関関数に関する式

$$g(r,t,h) = s^{2\lambda} g(r/s, s^{y_t}t, s^{y_h}h) \tag{19}$$

ここで再び $\ell_0$ 回くりこみを繰り返すと、

$$g(r,t,h) = s^{2\lambda\ell_0} g(r/s^{\ell_0}, \pm 1, s^{y_h\ell_0}h) = |t|^{-2\lambda/y_t} g(r/|t|^{-1/y_t}, \pm 1, h/|t|^{y_h/y_t}) \tag{20}$$

この形も、前節でスケーリング仮説として仮定した関数形と同じである。$r$ の分母は以前は相関長 $\xi$ ととっていたが、今回は代わりに $|t|^{1/y_t}$ が入っている。このことは

$$\xi \propto |t|^{-1/y_t} \tag{21}$$

であることを示している。$\xi$ の臨界指数は $t^{-\nu}$ となっていたから、

$$\nu = \frac{1}{y_t} \tag{22}$$

ということを意味している。$2-\alpha = d/y_t$ が得られいたから、これと併せて、

$$2 - \alpha = \nu d \tag{23}$$

というハイパースケーリング関係式が得られるのである！

　また、以前計算したように相関関数の $\boldsymbol{r}$ 積分が帯磁率に関係している。このことから

$$\chi = \int d\boldsymbol{r} g(r,t,h=0) \propto |t|^{-2\lambda/y_t} \times |t|^{d/y_t} = |t|^{(d-2\lambda)\nu} \tag{24}$$

が得られる。$\chi$ の臨界指数は $\gamma$ だったから、この結果は

$$\gamma = 2\lambda - d \tag{25}$$

を意味している。

　最後に $T = T_{\mathrm{c}}$ のときの相関関数を調べよう。このとき $t = 0, h = 0$ とおけば

$$g(r, t = 0.h = 0) = s^{2\lambda} g(r/s, 0, 0) \tag{26}$$

である。くりこみ群を $s^{\ell'} = r$ となるような $\ell'$ 回繰り返すと、

$$g(r, t = 0.h = 0) = s^{2\lambda\ell'} g(r/s^{\ell'}, 0, 0) = r^{2\lambda} g(1, 0, 0) \tag{27}$$

となる。このことは臨界指数 $\eta$ が

$$d + 2 - \eta = -2\lambda \tag{28}$$

となっていることを示している。